Universitatea din Craiova   MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII   FUNDAȚIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME

Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Craiova, 7–9 Mai 2026

BAREM
SECȚIUNEA A

Problema 1.

Fie $n \geq 1$ și fie $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ matrice care comută două câte două. Dacă $\operatorname{rang}(AB) = 1$ şi $AX - BX^2A = X^3$, demonstraţi că

$$\operatorname{rang}(A - X^2) \leq \dim \ker X + 1.$$

Soluție.

Punem $T = A - X^2$. Deoarece A, B, X comută două câte două, avem $BX^2A = ABX^2$. Ecuația $AX - BX^2A = X^3$ devine $AX - X^3 = ABX^2$, ...**3p**

adică $TX = ABX^2$. Cum T comută cu X, rezultă și $XT = ABX^2$. Prin urmare $\operatorname{rang}(XT) \leq \operatorname{rang}(AB) = 1$. **2p**

Aplicăm acum teorema rang-defect aplicației $X\big|_{\operatorname{Im} T} \colon \operatorname{Im} T \to \mathbb{C}^n$. Obținem $\dim \operatorname{Im} T = \operatorname{rang}(XT) + \dim\big(\operatorname{Im} T \cap \ker X\big)$, ...**3p**

cu alte cuvinte, $\operatorname{rang} T = \operatorname{rang}(XT) + \dim\big(\operatorname{Im} T \cap \ker X\big)$. De aici $\operatorname{rang} T \leq 1 + \dim \ker X$, adică $\operatorname{rang}(A - X^2) \leq \dim \ker X + 1$. **2p**

$\square$

Problema 2.

Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedru ortocentric cu ortocentrul H şi notăm $\mathbf{v}_i := \overrightarrow{HA_i}, i \in \overline{1,4}$.

a) Arătaţi că există scalarii $w_i \in \mathbb{R}$ pentru care $\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i = O_{3,1}$ şi $\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T = I_3$.

b) Se consideră cuadrica de ecuaţie

$$\mathcal{Q}: \quad \mathbf{r}^T K\mathbf{r} + L^T\mathbf{r} + p = 0,$$

unde $K \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), p \in \mathbb{R}$. Dacă $\mathrm{Tr}(K) = 0$ şi $A_i \in \mathcal{Q}$, $i \in \overline{1,4}$, atunci $H \in \mathcal{Q}$.

Notă. Într-un tetraedru ortocentric muchiile opuse sunt perpendiculare.

Soluție.

Observație preliminară. Există un scalar nenul $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \lambda$ pentru orice $i \neq j$.

Într-adevăr, dreptele HA_i sunt înălțimile tetraedrului, deci HA_1 este perpendiculară pe planul $A_2A_3A_4$. În particular:

$$HA_1 \perp A_2A_3 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2,$$
$$HA_1 \perp A_2A_4 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2) = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2.$$

Astfel $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4$. Aplicând același raționament pentru celelalte vârfuri, obținem

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4 =: \lambda.$$

Constanta λ este nenulă; altfel, presupunând $\lambda = 0$, dintr-o relație de dependență liniară $\sum_{i=1}^{4} c_i\mathbf{v}_i = O_{3,1}$ (există, fiind 4 vectori în $\mathbb{R}^3$) am obține, prin produs scalar cu $\mathbf{v}_k$, $c_k|\mathbf{v}_k|^2 = 0$, deci $c_k = 0$ pentru orice k, contradicție. **1p**

a) Există scalarii c_1, c_2, c_3, c_4, nu toți nuli, astfel încât $\sum_{i=1}^{4} c_i\mathbf{v}_i = O_{3,1}$. Înmulțim scalar această relație cu $\mathbf{v}_k$:

$$c_k|\mathbf{v}_k|^2 + \sum_{i\neq k} c_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k) = 0.$$

.... **1p**

Folosind $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k = \lambda$ pentru $i \neq k$ și notând $S = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$, obținem

$$c_k|\mathbf{v}_k|^2 + \lambda(S - c_k) = 0 \implies c_k(|\mathbf{v}_k|^2 - \lambda) = -\lambda S \implies c_k = \frac{-\lambda S}{|\mathbf{v}_k|^2 - \lambda}.$$

.... **1p**

Definim

$$w_k := -\frac{c_k}{\lambda S} = \frac{1}{|\mathbf{v}_k|^2 - \lambda}, \quad k \in \overline{1,4}.$$

Cu această alegere, $\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i = -\frac{1}{\lambda S}\sum_{i=1}^{4} c_i\mathbf{v}_i = O_{3,1}$. **1p**

Fie matricea $A = \sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T$. Pentru a arăta $A = I_3$, este suficient să verificăm $A\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k$ pentru $k \in \overline{1,3}$ (vectori liniar independenți, deci bază în $\mathbb{R}^3$):

$$A\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i(\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_k) = w_k|\mathbf{v}_k|^2\mathbf{v}_k + \lambda\sum_{i\neq k} w_i\mathbf{v}_i.$$

.... **1p**

Din $\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i = O_{3,1}$ avem $\sum_{i\neq k} w_i\mathbf{v}_i = -w_k\mathbf{v}_k$, deci

$$A\mathbf{v}_k = w_k|\mathbf{v}_k|^2\mathbf{v}_k - \lambda w_k\mathbf{v}_k = w_k(|\mathbf{v}_k|^2 - \lambda)\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_k.$$

....**1p**

b) Cum $A_i \in \mathcal{Q}$, ecuația cuadricei este satisfăcută pentru fiecare $\mathbf{v}_i = \overrightarrow{HA_i}$ (luând H ca origine):

$$\mathbf{v}_i^T K\mathbf{v}_i + L^T\mathbf{v}_i + p = 0, \quad i \in \overline{1,4}.$$

Înmulțim fiecare egalitate cu w_i (de la a)) și sumăm:

$$\sum_{i=1}^{4} w_i(\mathbf{v}_i^T K\mathbf{v}_i) + L^T\left(\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i\right) + p\sum_{i=1}^{4} w_i = 0.$$

....**1p**

Folosind $\mathbf{v}_i^T K\mathbf{v}_i = \mathrm{Tr}(K\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T)$ și liniaritatea urmei,

$$\sum_{i=1}^{4} w_i(\mathbf{v}_i^T K\mathbf{v}_i) = \mathrm{Tr}\left(K\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T\right) = \mathrm{Tr}(K\cdot I_3) = \mathrm{Tr}(K) = 0.$$

....**1p**

De asemenea, $\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i = O_{3,1}$, deci termenul $L^T\left(\sum w_i\mathbf{v}_i\right) = 0$. Rămâne

$$p\sum_{i=1}^{4} w_i = 0.$$

Calculăm $\sum_{i=1}^{4} w_i$. Aplicând urma identității $\sum_{i=1}^{4} w_i\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T = I_3$ și folosind $\mathrm{Tr}(\mathbf{v}_i\mathbf{v}_i^T) = |\mathbf{v}_i|^2$, obținem

$$\sum_{i=1}^{4} w_i|\mathbf{v}_i|^2 = \mathrm{Tr}(I_3) = 3.$$

....**1p**

Din $w_i = \frac{1}{|\mathbf{v}_i|^2-\lambda}$ rezultă $|\mathbf{v}_i|^2 = \frac{1}{w_i} + \lambda$, deci

$$3 = \sum_{i=1}^{4} w_i\left(\frac{1}{w_i} + \lambda\right) = 4 + \lambda\sum_{i=1}^{4} w_i \implies \sum_{i=1}^{4} w_i = -\frac{1}{\lambda} \neq 0.$$

Așadar $p = 0$. Calculând valoarea polinomului cuadricei în H (originea sistemului),

$$O_{3,1}^T K O_{3,1} + L^T O_{3,1} + p = p = 0,$$

deci $H \in \mathcal{Q}$. **1p**

$\square$

Problema 3.

Pentru $n \geq 0$, fie $F_n = 3^{3^n} + 1$. Pentru $n \geq 1$, numim *factor prim nou* al lui F_n orice prim p care divide F_n, dar nu divide F_{n-1}. Demonstraţi că, pentru orice $n \geq 1$ şi pentru orice factor prim nou p al lui F_n, avem

$$\operatorname{ord}_p(3) = 2 \cdot 3^n.$$

Soluție.

Fixăm $n \geq 1$ și punem $x = 3^{3^{n-1}}$. Atunci

$$F_n = 3^{3^n} + 1 = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1),$$

....**1p**

iar $F_{n-1} = x + 1$.

Fie p un factor prim nou al lui F_n. Prin definiție, $p \mid F_n$ și $p \nmid F_{n-1}$. Cum $F_n = (x+1)(x^2-x+1)$ și $F_{n-1} = x+1$, rezultă că $p \mid x^2 - x + 1$. **1p**

Observăm că $p \neq 2$ și $p \neq 3$. Într-adevăr, x este impar, deci $x^2 - x + 1$ este impar, de unde $p \neq 2$. De asemenea,

$$x^2 - x + 1 = 3^{2 \cdot 3^{n-1}} - 3^{3^{n-1}} + 1 \equiv 1 \pmod 3,$$

deci $p \neq 3$. **2p**

Din $p \mid x^2 - x + 1$ avem $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod p$. Înmulțind cu $x+1$, obținem $(x+1)(x^2-x+1) \equiv 0 \pmod p$, adică $x^3 + 1 \equiv 0 \pmod p$. Prin urmare $x^3 \equiv -1 \pmod p$, deci $x^6 \equiv 1 \pmod p$)..........**2p**

Arătăm că ordinul lui x modulo p este exact 6. Din $x^3 \equiv -1 \pmod p$ rezultă că ordinul lui x nu poate fi 1 sau 3. De asemenea, ordinul nu poate fi 2: într-adevăr, dacă $x \equiv -1 \pmod p$, atunci $x^2 - x + 1 \equiv 3 \pmod p$, ceea ce ar implica $p = 3$, contradicție. Prin urmare $\operatorname{ord}_p(x) = 6$. **1p**

Dar $x = 3^{3^{n-1}}$. Notăm $t = \operatorname{ord}_p(3)$. Folosind formula

$$\operatorname{ord}_p\big(a^k\big) = \frac{\operatorname{ord}_p(a)}{\gcd\big(\operatorname{ord}_p(a),\, k\big)},$$

obținem

$$6 = \operatorname{ord}_p\big(3^{3^{n-1}}\big) = \frac{t}{\gcd(t,\, 3^{n-1})}.$$

....**1p**

Scriem $t = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, u$, unde $\gcd(u, 6) = 1$. Atunci

$$6 = \frac{t}{\gcd(t,\, 3^{n-1})} = 2^{\alpha}\, 3^{\,\beta - \min(\beta,\, n-1)}\, u.$$

....**1p**

Comparând cu $6 = 2 \cdot 3$, rezultă că $\alpha = 1$, $u = 1$ și $\beta - \min(\beta,\, n-1) = 1$. Această ultimă egalitate impune $\beta \geq n - 1$, iar atunci $\beta - (n-1) = 1$, deci $\beta = n$. Prin urmare $t = 2 \cdot 3^n$, adică $\operatorname{ord}_p(3) = 2 \cdot 3^n$.
....**1p**

$\square$

Problema 4.

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2026}$ numere reale strict pozitive, distincte două câte două. Determinaţi funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty$ astfel încât

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \qquad \sum_{i=1}^{2026} f(a_i x) = 0.$$

Soluție.

Vom arăta că singura soluție este funcția identic nulă. Fără a restrânge generalitatea, presupunem $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2026}$. **1p**

Fie f o soluție și $n \in \mathbb{N}$ fixat. Derivând de n ori ecuația funcțională — operație legitimă întrucât $f \in \mathcal{C}^\infty$ —, obținem

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{i=1}^{2026} a_i^n\, f^{(n)}(a_i x) = 0.$$

.... **1p**

Înlocuind x cu x/a_{2026} și izolând termenul de indice maxim,

$$f^{(n)}(x) = -\sum_{i=1}^{2025} \frac{a_i^n}{a_{2026}^n}\, f^{(n)}\!\left(\frac{a_i}{a_{2026}}\, x\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

.... **1p**

Alegem n suficient de mare astfel încât

$$C_n = \sum_{i=1}^{2025} \frac{a_i^n}{a_{2026}^n} < 1.$$

.... **1p**

Această alegere este posibilă deoarece, pentru fiecare $i \in \{1, \dots, 2025\}$, avem $a_i/a_{2026} \in (0,1)$, deci $(a_i/a_{2026})^n \to 0$ când $n \to \infty$, iar C_n este sumă finită de 2025 termeni care converg la 0. .... **1p**

Fie $\alpha > 0$ și

$$M_\alpha = \max_{x \in [-\alpha, \alpha]} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

(maximumul există, întrucât $f^{(n)}$ este continuă pe compactul $[-\alpha, \alpha]$). **1p**

Pentru orice $x \in [-\alpha, \alpha]$ și orice $i \in \{1, \dots, 2025\}$, avem $\dfrac{a_i}{a_{2026}}\, x \in [-\alpha, \alpha]$ (deoarece $a_i/a_{2026} < 1$), deci

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \le \sum_{i=1}^{2025} \frac{a_i^n}{a_{2026}^n} \left| f^{(n)}\!\left(\frac{a_i}{a_{2026}}\, x\right) \right| \le C_n\, M_\alpha.$$

.... **1p**

Luând maximumul peste $x \in [-\alpha, \alpha]$, obținem $M_\alpha \le C_n\, M_\alpha$, adică $(1 - C_n)\, M_\alpha \le 0$. Cum $C_n < 1$ și $M_\alpha \ge 0$, rezultă $M_\alpha = 0$. Așadar $f^{(n)} \equiv 0$ pe $[-\alpha, \alpha]$; cum $\alpha > 0$ a fost ales arbitrar, $f^{(n)} \equiv 0$ pe $\mathbb{R}$. **1p**

Anularea derivatei de ordinul n pe întreaga axă reală arată că f este o funcție polinomială de grad cel mult $n-1$. Scriem $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\, x^k$ și înlocuim în ecuația funcțională:

$$\sum_{i=1}^{2026} f(a_i x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \left(\sum_{i=1}^{2026} a_i^k \right) x^k = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Cum $a_i > 0$ pentru orice i, avem $\sum\limits_{i=1}^{2026} a_i^k > 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Prin identificarea coeficienților unui polinom identic nul, $c_k = 0$ pentru orice $k \in \{0, \dots, n-1\}$, deci $f \equiv 0$. **2p**

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.
Timp de lucru: 4 ore.