Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Craiova, 7–9 Mai 2026

SOLUŢIE ŞI BAREM DE CORECTARE
SECȚIUNEA B

Problema 1.

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $n \geq 2$, astfel încât $A^2 = A$. Să se arate că

$$\det(I_n - A + BAB) \geq 0,$$

pentru orice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Prima soluţie:

Este suficient să probăm relația pentru $B = I_n - C$, unde $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este arbitrară. **1p**

Avem $BAB = (I_n - C)\,A\,(I_n - C) = (I_n - C)(A - AC) = A - AC - CA + CAC$, și folosind $A^2 = A$, obținem

$$\begin{aligned} I_n - A + BAB &= I_n - A + A - AC - CA + CAC = I_n - AC - CA + CAC \\ &= I_n - AC - CA + CA^2C = (I_n - CA)(I_n - AC). \end{aligned}$$

.... **3p**

Trecând la determinant, rezultă

$$\det(I_n - A + BAB) = \det(I_n - CA) \cdot \det(I_n - AC).$$

.... **1p**

În continuare, folosim faptul cunoscut că $\det(I_n - XY) = \det(I_n - YX)$, pentru orice X, $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. **3p**

Obținem

$$\det(I_n - A + BAB) = \big(\det(I_n - AC)\big)^2 \geq 0.$$

.... **2p**

A doua soluţie:

Dacă $A = O_n$, concluzia este evidentă. **1p**

Deci, putem presupune că rang $A = k \geq 1$.

Matricea A fiind idempotentă, există o matrice inversabilă $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel ca

$$A = PJ_AP^{-1}, \qquad J_A = \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

.... **3p**

Pentru $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, arbitrar, fie $C = P^{-1}BP$ (echivalent cu $B = PCP^{-1}$). Avem

$$I_n - A + BAB = P\,(I_n - J_A + CJ_AC)\,P^{-1},$$

și atunci $\det(I_n - A + BAB) = \det(I_n - J_A + CJ_AC)$. **1p**

Scriem C pe blocuri în acord cu J_A:

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}, \qquad C_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}).$$

.... **1p**

Obținem $CJ_AC = \begin{pmatrix} C_1^2 & C_1C_2 \\ C_3C_1 & C_3C_2 \end{pmatrix}$ și, pe de altă parte,

$$\begin{pmatrix} C_1 & O \\ C_3 & I_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^2 & C_1C_2 \\ C_3C_1 & C_3C_2 + I_{n-k} \end{pmatrix},$$

....**3p**

de unde deducem că

$$I_n - J_A + CJ_AC = \begin{pmatrix} C_1 & O \\ C_3 & I_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ O & I_{n-k} \end{pmatrix}.$$

Trecând la determinant, obţinem

$$\det(I_n - J_A + CJ_AC) = \begin{vmatrix} C_1 & O \\ C_3 & I_{n-k} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ O & I_{n-k} \end{vmatrix} = (\det C_1)^2 \geq 0.$$

În concluzie, $\det(I_n - A + BAB) \geq 0$. **1p**

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n\geq 0}$, un şir de numere reale nenule, şi $(b_n)_{n\geq 0}$, un şir de numere reale, astfel încât $n \cdot |a_{n-1} - a_n| \leq |a_n|$, pentru orice $n \geq 1$, şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\,|b_n|$ este convergentă. Definim şirul $(c_n)_{n\geq 0}$ prin

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k, \quad \text{pentru orice } n \geq 0.$$

Arătaţi că:

a) $\left|\dfrac{a_{n-k}}{a_n} - 1\right| \leq \dfrac{k}{n-k+1}$, pentru orice $n \geq 1$ şi $1 \leq k \leq n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

Soluţie:

a) Fie $n \geq 1$ şi $1 \leq k \leq n$, oarecare. Avem

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = \frac{a_{n-k}}{a_{n-k+1}} \cdot \frac{a_{n-k+1}}{a_{n-k+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = \prod_{j=n-k+1}^{n} \frac{a_{j-1}}{a_j}.$$

Conform ipotezei, avem

$$m \cdot |a_{m-1} - a_m| \leq |a_m|, \quad \text{pentru orice } m \geq 1,$$

de unde obţinem că

$$\left|\frac{a_{m-1}}{a_m} - 1\right| \leq \frac{1}{m},$$

ceea ce implică

$$\frac{m-1}{m} \leq \frac{a_{m-1}}{a_m} \leq \frac{m+1}{m}.$$

Rezultă că

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = \prod_{j=n-k+1}^{n} \frac{a_{j-1}}{a_j} \leq \prod_{j=n-k+1}^{n} \frac{j+1}{j} = \frac{n+1}{n-k+1} = 1 + \frac{k}{n-k+1}$$

şi

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = \prod_{j=n-k+1}^{n} \frac{a_{j-1}}{a_j} \geq \prod_{j=n-k+1}^{n} \frac{j-1}{j} = \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n} \geq 1 - \frac{k}{n-k+1}.$$

Am obţinut, astfel, că

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n} - 1\right| \leq \frac{k}{n-k+1},$$

pentru orice $n \geq 1$ şi $1 \leq k \leq n$. **3p**

b) Ţinând cont de definiţia şirului $(c_n)_{n\geq 0}$, putem scrie

$$\frac{c_n}{a_n} - \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{n-k}}{a_n} - 1\right) b_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k.$$

.... **1p**

Deoarece seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k b_k$ este absolut convergentă, rezultă că şi seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ este absolut convergentă. Deci

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k = 0.$$

.... **1p**

Trebuie să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k=0.$$

Conform punctului a), pentru orice $1\le k\le n$, avem

$$\left|\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\frac{k|b_k|}{n-k+1}.$$

....**1p**

Scriem

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k=\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+2}^{n}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k.$$

....**2p**

Pentru $1\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]+1$, avem $n-k+1\ge\frac{n}{2}$, deci

$$\left|\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\frac{k|b_k|}{n-k+1}\le\frac{2}{n}k|b_k|.$$

Prin urmare,

$$\left|\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left|\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}k|b_k|\to 0,\text{pentru } n\to\infty.$$

....**1p**

Pe de altă parte, pentru $\left[\frac{n}{2}\right]+2\le k\le n$, putem scrie

$$\left|\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\frac{k|b_k|}{n-k+1}\le k|b_k|,$$

aşa că

$$\left|\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+2}^{n}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+2}^{n}\left|\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k\right|\le\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+2}^{n}k|b_k|\to 0,\text{pentru } n\to\infty.$$

....**1p**

Rezultă, aşadar, că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{n-k}}{a_n}-1\right)b_k=0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k.$$

Problema 3.

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, două polinoame. Notăm cu $D = (f, g)$, cel mai mare divizor comun al acestora, şi cu $M = [f, g]$, cel mai mic multiplu comun al acestora. Să se arate că, pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $n \geq 2$, au loc relaţiile:

a) $\ker D(A) = \ker f(A) \cap \ker g(A)$;

b) $\ker M(A) = \ker f(A) + \ker g(A)$.

Rezolvare: Scriem $f = f_1 \cdot D$ și $g = g_1 \cdot D$, cu $(f_1, g_1) = 1$. Atunci

$$M = f_1 \cdot g_1 \cdot D = g_1 \cdot f = f_1 \cdot g. \tag{1}$$

a) Demonstrăm cele două incluziuni.

"$\subset$": Dacă $X \in \ker D(A)$, atunci $D(A)X = O$ și

$$f(A)X = f_1(A) \cdot D(A)X = O, \qquad g(A)X = g_1(A) \cdot D(A)X = O,$$

deci $X \in \ker f(A) \cap \ker g(A)$. **2p**

"$\supset$": Cum $D = (f, g)$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[X]$ astfel ca $D = \alpha f + \beta g$, deci

$$D(A) = \alpha(A) \cdot f(A) + \beta(A) \cdot g(A).$$

.... **1p**

Dacă $X \in \ker f(A) \cap \ker g(A)$, atunci $f(A)X = g(A)X = O$, astfel că

$$D(A)X = \alpha(A)\, f(A)X + \beta(A)\, g(A)X = O,$$

deci $X \in \ker D(A)$.. **1p**

b) Demonstrăm cele două incluziuni.

"$\supset$": Fie $X \in \ker f(A)$. Atunci

$$M(A)X = g_1(A) \cdot f(A)X = O,$$

deci $X \in \ker M(A)$. Analog, $\ker g(A) \subset \ker M(A)$. Cum $\ker M(A)$ este un subspațiu, rezultă $\ker f(A) + \ker g(A) \subset \ker M(A)$. **2p**

"$\subset$": Fie $X \in \ker M(A)$, deci $M(A)X = O$. Având în vedere că $(f_1, g_1) = 1$, există $u, v \in \mathbb{C}[X]$ astfel ca $u\, f_1 + v\, g_1 = 1$. **1p**

Obținem

$$X = \big(u(A)\, f_1(A) + v(A)\, g_1(A)\big)X = X_2 + X_1,$$

unde

$$X_1 = v(A)\, g_1(A)X, \qquad X_2 = u(A)\, f_1(A)X.$$

.... **2p**

Verificăm că $X_1 \in \ker f(A)$ și $X_2 \in \ker g(A)$:

$$f(A)X_1 = v(A)\, g_1(A)\, f(A)X = v(A)\, M(A)X = O,$$

$$g(A)X_2 = u(A)\, f_1(A)g(A)\, X = u(A)\, M(A)X = O,$$

unde am folosit (1). Așadar $X \in \ker f(A) + \ker g(A)$. **1p**

Problema 4.

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie continuă, cu $f(0) = 1$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} tf(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

a) Arătaţi că şirul $\left(n^2 a_n\right)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Notăm cu $L = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n$. Presupunem că funcţia f este de clasă C^1 şi că $f'(0) = 2026$. Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \dfrac{L}{n^2}\right)^p$, unde $p \in \mathbb{R}$.

Rezolvare: a) Fie $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $G(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ primitiva funcţiei continue $x \mapsto xf(x)$ care se anulează în 0. Vom avea, folosind regula L'Hospital şi continuitatea funcţiei f,

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{G\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{G(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0_+} \frac{xf(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2} = \frac{1}{2} = L.$$

.... **3p**

b) Observăm că

$$a_n - \frac{L}{n^2} = \int_0^{\frac{1}{n}} tf(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{1}{n}} tf(0)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{n}} t\,(f(t) - f(0))\,\mathrm{d}t.$$

.... **3p**

Fie $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(x) = \displaystyle\int_0^x t\,(f(t) - f(0))\,\mathrm{d}t$ primitiva funcţiei continue $x \mapsto x\,(f(x) - f(0))$. Avem succesiv, pentru $x > 0$:

$$H'(x) = x\,(f(x) - f(0)),$$
$$H''(x) = f(x) - f(0) + xf'(x).$$

Atunci, folosind din nou regula L'Hospital şi faptul că f este de clasă C^1,

$$\lim_{n\to\infty} n^3 \left(a_n - \frac{L}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{H\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{H(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0_+} \frac{H'(x)}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0_+} \frac{H''(x)}{6x} = \lim_{x\to 0_+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{6x} + \frac{f'(x)}{6}\right) = \frac{f'(0)}{3} = \frac{2026}{3}.$$

.... **3p**

Va rezulta implicit şi că şirul $\left(a_n - \frac{L}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ are termeni pozitivi pentru n suficient de mare, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{L}{n^2}\right)^p$ va avea aceeaşi natură cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}}$, adică va fi convergentă dacă şi numai dacă $p > \frac{1}{3}$. **1p**