

**Concursul Național Studentesc de Matematică
"Traian Lalescu"
Craiova, 7–9 Mai 2026**

**BAREM
SECȚIUNEA C**

Problema 1.

Fie funcția $f_n : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, definită prin:

$$f_n(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^n + y^n)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Să se studieze continuitatea funcției în origine.
- b) Să se demonstreze că funcția f_n este diferențiabilă în origine dacă și numai dacă $n \geq 3$.
- c) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(n, n)$.

Rezolvare:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + x^n + y^n)}{x^n + y^n} = 1$ **0,50p**
 $n = 1$, nu există limita **2,00p**
 $n > 1$, limita este egală cu 0 (prin orice metodă corectă de rezolvare) **2,00p**
 f_n continuă în origine $\Leftrightarrow n \geq 2$ **0,50p**
- b) f_1 nu este continuă, deci nu este diferențiabilă **0,50p**
 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 0, & n \geq 3 \end{cases}$ **1,50p**
 f_2 nu este diferențiabilă **0,50p**
 f_n este diferențiabilă pentru $n \geq 3$ **0,50p**
- c) Criteriul comparației **1,50p**
Seria este divergentă **0,50p**

Problema 2.

Fie funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg}(y \cdot \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$.

- a) Să se determine polinomul Taylor de gradul doi asociat funcției $g(y) = f(\operatorname{arctg} 2026, y)$ în $y = 0$.
- b) Folosind derivarea sub semnul de integrare, să se calculeze $I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx$.

Rezolvare:

- a) $g(y) = \frac{\operatorname{arctg}(2026y)}{2026}$ **1,00p**
 Formula polinomului Taylor **0,50p**
 $g'(0) = 1$ **0,50p**
 $g''(0) = 0$ **0,50p**
 $T_2(y) = y$ **0,50p**
- b) $I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + y^2 \cdot \operatorname{tg}^2 x} dx$ **0,50p**
 $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow I'(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + y^2 t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt$ **1,00p**
 $\frac{1}{(1 + y^2 t^2)(1 + t^2)} = \frac{At + B}{1 + y^2 t^2} + \frac{Ct + D}{1 + t^2}$ **0,50p**
 $I'(y) = \frac{y^2}{y^2 - 1} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + y^2 t^2} dt + \frac{1}{1 - y^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt$ **2,00p**
 $I'(y) = -\frac{y}{1 - y^2} \operatorname{arctg}(ty) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{1 - y^2} \operatorname{arctg}(t) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + y}$ **1,00p**
 $I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + y) + C$ **1,00p**
 $I(0) = 0 \Rightarrow I(y) = \frac{\pi}{2} \ln(1 + y)$ **1,00p**

Problema 3.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și operatorul $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definit prin:

$$T_{a,b}(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + x_3, x_1 + bx_2 + ax_3, bx_1 + ax_2 + x_3), \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

- a) Să se determine condițiile asupra parametrilor a și b astfel încât operatorul $T_{a,b}$ să fie bijectiv.
- b) Să se determine o bază și dimensiunea complementului ortogonal al nucleului operatorului $T_{1,2}$, considerând \mathbb{R}^3 înzestrat cu produsul scalar canonic.
- c) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, operatorul $T_{a,1}$ este diagonalizabil?

Rezolvare:

- a) Matricea operatorului este $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & b & a \\ b & a & 1 \end{pmatrix}$ **0,50p**
 $T_{a,b}$ bijectiv $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ **0,50p**
 $\det(A) = (a + b + 1)(1 - a)(1 - b) \neq 0$ **1,00p**
- b) $\ker(T) = \{(\alpha, \alpha, -3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ și $B_{\ker(T)} = \{(1, 1, -3)\}$ **1,50p**
 $(\ker(T))^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 3z = 0\}$ **1,00p**
 $B_{(\ker(T))^\perp} = \{(-1, 1, 0); (3, 0, 1)\}$ și $\dim((\ker(T))^\perp) = 2$ **0,50p**
- c) Calcularea polinomului caracteristic $p(\lambda)$ **1,00p**
 Valorile proprii $\lambda_1 = a + 2, \lambda_2 = 1 - a$ și $\lambda_3 = a - 1$ **1,00p**
 $\lambda_1 \neq \lambda_3$ deoarece $a + 2 = a - 1$ nu are soluții reale **0,50p**
 $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_a\left(\frac{3}{2}\right) = m_g\left(\frac{3}{2}\right) = 2, m_a\left(-\frac{3}{2}\right) = m_g\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \Rightarrow T_{-1/2,1}$ este diagonalizabil **1,00p**
 $\lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow m_a(0) = m_g(0) = 2, m_a(3) = m_g(3) = 1 \Rightarrow T_{1,1}$ este diagonalizabil **1,00p**
 Valorile proprii sunt distincte două câte două $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \Rightarrow m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) = 1$, pentru orice $i \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow T_{a,1}$ este diagonalizabil **0,50p**

Problema 4.

Fie familia de sfere

$$(S_\lambda) : x^2 + y^2 + z^2 - 2(\lambda + 1)x + 2y + 2\lambda + 2 = 0, \lambda \in \mathbb{R},$$

și planele:

$$(\pi_1) : 2x - y - z = 2,$$

$$(\pi_2) : x + 2y + 2z = -1,$$

$$(\pi_3) : x + 7y + 7z = -m,$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

- a) Să se arate că toate sferele S_λ trec printr-un punct fix și să se determine coordonatele acestuia.
- b) Să se determine valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care cele trei plane se intersectează după o dreaptă d și să se scrie ecuațiile parametrice ale acestei drepte.
- c) Există în familia S_λ sfere tangente la dreapta d determinată la punctul anterior? În caz afirmativ, să se scrie ecuațiile acestor sfere.

Rezolvare:

a) Condiția de punct fix devine $\begin{cases} 2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1,00p$

Punctul fix este $(1, -1, 0) \dots\dots\dots 1,00p$

b) Determinantul sistemului dat de intersecția celor trei plane este nul $\dots\dots\dots 0,50p$

Condiția pentru dreaptă comună revine la sistem este compatibil simplu nedeterminat $\dots\dots 0,50p$

$m = 5 \dots\dots\dots 1,00p$

Ecuațiile parametrice sunt: $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} - \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1,00p$

c) Centrul $C_\lambda(\lambda + 1, -1, 0)$ și raza $R_\lambda = |\lambda| \dots\dots\dots 1,00p$

Condiția de tangență $\text{dist}(C_\lambda, d) = R_\lambda \dots\dots\dots 1,00p$

Vectorul director al dreptei d este $(0, -1, 1) \dots\dots\dots 0,50p$

Calculul distanței: $\text{dist}(C_\lambda, d) = \frac{\sqrt{50\lambda^2 + 40\lambda + 9}}{5\sqrt{2}} \dots\dots\dots 1,50p$

$\lambda = -\frac{9}{40}$ și sfera este $\left(x - \frac{31}{40}\right)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = \frac{81}{1600} \dots\dots\dots 1,00p$