Universitatea din Craiova
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII
FUNDATIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME

Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Craiova, 7–9 Mai 2026

BAREM
SECȚIUNEA D

Problema 1.
Determinați funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe $\mathbb{C}$, pentru care:

$$\mathrm{Re}\,(f) - Im(f') = \varphi(e^x \sin y),\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ \ z = x + iy.$$

şi care satisface condițiile $f(0) = f'(0) = 0$ şi $f(\pi) - f(-\pi i) = 2(e^\pi + 1)$.

Rezolvare:

Obţine relaţia $u + \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(e^x \sin y)$. **1p**
Condiţia φ armonică conduce la $\varphi(t) = at + b, \quad t \in \mathbb{R},\ a, b \in \mathbb{R}$ **1p**
Rezolvă ecuaţia diferenţială liniară de ordinul I: $\frac{\partial u}{\partial y} + u = ae^x \sin y + b$ şi obţine soluţia
$u = \dfrac{a}{2} e^x (\sin y - \cos y) + b + e^{-y} C(x), \quad C(x) \in C^1(\mathbb{R})$ **2p**
Condiţia u armonică conduce la $C(x) = c \sin x + d \cos x, \quad c, d \in \mathbb{R}$ **1p**
Obţine $f'(z) = -\dfrac{a}{2}(1 + i)e^z + (c + id)e^{iz}$ **2p**
Obţine $f(z) = -\dfrac{a}{2}(1 + i)e^z - i(c + id)e^{iz} + k,\ k \in \mathbb{C}$ **1p**
Impune condiţiile din enunţ şi finalizează $f(z) = (1 + i)(e^z + ie^{iz}) - 2i$ **2p**

Problema 2.

Calculați

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+\operatorname{ch}(2x)}\,\mathrm{d}x,\ a>0.$$

Rezolvare:

Formează integrala $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{1+\operatorname{ch}(2x)}\,\mathrm{d}x$, ... **1p**

Pentru $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{1+\operatorname{ch}(2z)}$ determină polii dubli $z_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} i,\ k \in \mathbb{Z}$ **1p**

Construieşte conturul de integrare Γ: dreptunghiul $ABCD$, $A(-R,0)$, $B(R,0)$, $C(R,\alpha)$, $D(-R,\alpha)$ şi determină $\alpha = \pi$ din condiţia $\displaystyle\int_{CD} f(z)\,\mathrm{d}z = m \cdot \int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z$, $m = -e^{-\pi a}$ **2p**

Justifică $\displaystyle\int_{AB} f(z)\,\mathrm{d}z \to J$, $\displaystyle\int_{BC} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$, $\displaystyle\int_{DA} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ pentru $R \to \infty$ **2p**

Calculează $\operatorname{Res}\left(f, \dfrac{\pi}{2} i\right) = -\dfrac{ia}{2} e^{-\frac{\pi}{2}a}$ **3p**

Aplică Teorema reziduurilor: $\left(1-e^{-\pi a}\right)J = \pi a \cdot e^{-\frac{-\pi}{2}a}$

şi finalizează: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+\operatorname{ch}(2x)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}(J) = \frac{\pi a e^{-\frac{\pi}{2}a}}{1-e^{-\pi a}}$ **1p**

Problema 3.

Să se rezolve în clasa funcţiilor original Laplace problema:

$$x''(t)+2x'(t)+2x(t)+\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}x(\tau)d\tau=0,\ t\geq 0$$
$$x(0)=0,\ x'(0)=1.$$

Rezolvare:

Aplică transformata Laplace, recunoaşte produsul de convoluţie şi obţine:
$\mathcal{L}[x(t)](s)\cdot\left(s^2+2s+2+\dfrac{1}{(s+1)^2}\right)=1$ **3p**
Scrie $\mathcal{L}[x(t)](s)=\dfrac{(s+1)^2}{(s+1)^4+(s+1)^2+1}=\mathcal{L}[e^{-t}f(t)](s)$, unde $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s^2}{s^4+s^2+1}\right](t)$ .. **3p**
Desface în fracţii simple: $\dfrac{s^2}{s^4+s^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{s}{s^2-s+1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{s}{s^2+s+1}$ **1p**
Găseşte
$f(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}t}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ **2p**
Găseşte
$x(t)=e^{-t}\left[\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{2}t\right)\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{2}t\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right],\ t\geq 0$ **1p**

Problema 4.

Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ şi $g(x) = (1-x^2)\cdot f^2(x)$ şi fie

$$h_n(x) = \underbrace{f(x) * f(x) * ... * f(x)}_{n \text{ ori}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

unde $*$ reprezintă produsul de convoluţie.

a) Calculaţi transformatele Fourier $\hat{f}(\omega)$ şi $\hat{g}(\omega)$.

b) Calculaţi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_{2026}(x) \cdot \sin x \cdot \sin(2x)\, dx$.

Rezolvare:

a) Calculează $\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \pi e^{\omega},\ \omega < 0, \\ \pi e^{-\omega},\ \omega > 0, \\ \pi,\ \omega = 0 \end{cases}$ sau $\hat{f}(\omega) = \pi \cdot e^{-|\omega|}$ **2p**

Scrie $g(x) = \big(x \cdot f(x)\big)'$ şi obţine $\hat{g}(\omega) = \pi \cdot |\omega| \cdot e^{-|\omega|}$ **3p**

b) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_{2026}(x) \cdot \cos(x)\, \mathrm{d}x - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_{2026}(x) \cdot \cos(3x)\, \mathrm{d}x$ **1p**

$I = \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\hat{h}_{2026}(1)) - \dfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\hat{h}_{2026}(3))$ **2p**

$\hat{h}_n(\omega) = \big(\hat{f}(\omega)\big)^n$ **1p**

Finalizare $I = \dfrac{\pi^{2026}}{2}\big(e^{-2026} - e^{-6078}\big)$ **1p**