Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Craiova, 7–9 Mai 2026

SECȚIUNEA A

Problema 1. Fie $n \geq 1$ și fie $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ matrice care comută două câte două. Dacă $\operatorname{rang}(AB) = 1$ şi $AX - BX^2A = X^3$, demonstraţi că

$$\operatorname{rang}(A - X^2) \leq \dim \ker X + 1.$$

Problema 2. Fie $A_1A_2A_3A_4$ tetraedru ortocentric cu ortocentrul H şi notăm $\mathbf{v}_i := \overrightarrow{HA_i}, i \in \overline{1,4}$.

a) Arătaţi că există scalarii $w_i \in \mathbb{R}$ pentru care $\sum_{i=1}^{4} w_i \mathbf{v}_i = O_{3,1}$ şi $\sum_{i=1}^{4} w_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T = I_3$.

b) Se consideră cuadrica de ecuaţie

$$\mathcal{Q}: \quad \mathbf{r}^T K \mathbf{r} + L^T \mathbf{r} + p = 0,$$

unde $K \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), L \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), p \in \mathbb{R}$. Dacă $\operatorname{Tr}(K) = 0$ şi $A_i \in \mathcal{Q}$, $i \in \overline{1,4}$, atunci $H \in \mathcal{Q}$.

Notă. Într-un tetraedru ortocentric muchiile opuse sunt perpendiculare.

Problema 3.

Pentru $n \geq 0$, fie $F_n = 3^{3^n} + 1$. Pentru $n \geq 1$, numim *factor prim nou* al lui F_n orice prim p care divide F_n, dar nu divide F_{n-1}.

Demonstraţi că, pentru orice $n \geq 1$ şi pentru orice factor prim nou p al lui F_n, avem

$$\operatorname{ord}_p(3) = 2 \cdot 3^n,$$

unde cu $\operatorname{ord}_p(x)$ s-a notat ordinul lui x în $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$.

Problema 4. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ numere reale strict pozitive, distincte două câte două. Determinaţi funcţiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty$ astfel încât

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \qquad \sum_{i=1}^{2026} f(a_i x) = 0.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.
Timp de lucru: 4 ore.