

Concursul Național Studentesc de Matematică
"Traian Lalescu"
Craiova, 7–9 Mai 2026

SECȚIUNEA B

Problema 1.

Fie matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $n \geq 2$, astfel încât $A^2 = A$. Să se arate că

$$\det(I_n - A + BAB) \geq 0,$$

pentru orice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problema 2.

Fie $(a_n)_{n \geq 0}$, un șir de numere reale nenule, și $(b_n)_{n \geq 0}$, un șir de numere reale, astfel încât $n \cdot |a_{n-1} - a_n| \leq |a_n|$, pentru orice $n \geq 1$, și seria $\sum_{n=0}^{\infty} n |b_n|$ este convergentă. Definim șirul $(c_n)_{n \geq 0}$ prin

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k, \quad \text{pentru orice } n \geq 0.$$

Arătați că:

- a) $\left| \frac{a_{n-k}}{a_n} - 1 \right| \leq \frac{k}{n-k+1}$, pentru orice $n \geq 1$ și $1 \leq k \leq n$;
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Problema 3.

Fie $f, g \in \mathbb{C}[X]$, două polinoame. Notăm cu $D = (f, g)$, cel mai mare divizor comun al acestora, și cu $M = [f, g]$, cel mai mic multiplu comun al acestora. Să se arate că, pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $n \geq 2$, au loc relațiile:

- a) $\ker D(A) = \ker f(A) \cap \ker g(A)$;
b) $\ker M(A) = \ker f(A) + \ker g(A)$.

Problema 4.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție continuă, cu $f(0) = 1$. Definim șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ prin

$$a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} t f(t) dt, \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

- a) Arătați că șirul $(n^2 a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.
b) Notăm cu $L = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$. Presupunem că funcția f este de clasă C^1 și că $f'(0) = 2026$. Studiați natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{L}{n^2} \right)^p$, unde $p \in \mathbb{R}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.
Timp de lucru: 4 ore.