Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Craiova, 7–9 Mai 2026

SECȚIUNEA C

Problema 1.

Fie funcţia $f_n : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, definită prin:

$$f_n(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + x^n + y^n)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Să se studieze continuitatea funcţiei în origine.

b) Să se demonstreze că funcţia f_n este diferenţiabilă în origine dacă şi numai dacă $n \geq 3$.

c) Să se studieze natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(n, n)$.

Problema 2.

Fie funcţia $f : \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(y \cdot \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$.

a) Să se determine polinomul Taylor de gradul doi asociat funcţiei $g(y) = f(\operatorname{arctg} 2026, y)$ în $y = 0$.

b) Folosind derivarea sub semnul de integrare, să se calculeze $I(y) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\, \mathrm{d}x$.

Problema 3.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi operatorul $T_{a,b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin:

$$T_{a,b}(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + x_3, x_1 + bx_2 + ax_3, bx_1 + ax_2 + x_3),\ \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

a) Să se determine condiţiile asupra parametrilor a şi b astfel încât operatorul $T_{a,b}$ să fie bijectiv.

b) Să se determine o bază şi dimensiunea complementului ortogonal al nucleului operatorului $T_{1,2}$, considerând $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu produsul scalar canonic.

c) Pentru ce valori ale lui $a \in \mathbb{R}$, operatorul $T_{a,1}$ este diagonalizabil?

Problema 4.

Fie familia de sfere

$$(S_\lambda):\ x^2+y^2+z^2-2(\lambda+1)x+2y+2\lambda+2=0,\ \lambda\in\mathbb{R},$$

şi planele:

$$\begin{aligned}(\pi_1):&\ 2x-y-z=2,\\(\pi_2):&\ x+2y+2z=-1,\\(\pi_3):&\ x+7y+7z=-m,\end{aligned}$$

unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că toate sferele S_λ trec printr-un punct fix şi să se determine coordonatele acestuia.

b) Să se determine valoarea parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care cele trei plane se intersectează după o dreaptă d şi să se scrie ecuaţiile parametrice ale acestei drepte.

c) Există în familia S_λ sfere tangente la dreapta d determinată la punctul anterior? În caz afirmativ, să se scrie ecuaţiile acestor sfere.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.
Timp de lucru: 4 ore.