Universitatea din Craiova   MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII   FUNDAȚIA TRAIAN LALESCU DE LA MATEMATICA... SPRE LUME

Concursul Național Studențesc de Matematică "Traian Lalescu"

Craiova, 7–9 Mai 2026

SECȚIUNEA E

Problema 1.

Fie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfă pe $\mathbb{C}$, pentru care $f(0) = 0$ şi

$$\operatorname{Re}(f) = x \cdot \varphi(y) + y \cdot \psi(x), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}),\ z = x + iy.$$

a) Determinaţi funcţia $f(z)$;

b) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^\infty e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1 + i)$;

c) Dacă $f(1) = \frac{i}{24}$, $f'(0) = f''(0) = 0$ rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia

$$f(z) = \frac{1}{6\pi}\left(\int_0^\infty e^{ix^2} dx\right)^2.$$

Problema 2.

Calculaţi

$$\int_{|z|=3} (1 + z^2)\left(e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz.$$

Problema 3.

Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ şi $g(x) = (1 - x^2) \cdot f^2(x)$ şi fie

$$h_n(x) = \underbrace{f(x) * f(x) * \ldots * f(x)}_{n \text{ ori}},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

unde $*$ reprezintă produsul de convoluţie.

a) Calculaţi transformatele Fourier $\hat{f}(\omega)$ şi $\hat{g}(\omega)$.

b) Calculaţi $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty h_{2026}(x) \cdot \sin x \cdot \sin(2x) dx$.

Problema 4.

Să se rezolve în clasa funcţiilor original Laplace problema:

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) + \int_0^t (t - \tau)e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau = 0,\ t \geq 0$$

$$x(0) = 0,\ x'(0) = -1.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu punctaje cuprinse între 0 și 10.
Timp de lucru: 4 ore.